Schweinewürfeln – Eine stochastische Lernumgebung zum Würfel

Christian Rütten und Petra Scherer, Essen

Zusammenfassung: *Lernende der vierten Klasse erkunden im Lehr-Lern-Labor ‚Mathe-Spürnasen' die stochastische Relevanz der physikalischen bzw. geometrischen Eigenschaften des sechsseitigen Spielwürfels, indem sie dessen stochastische Eigenschaften mit denen des asymmetrischen Zufallsgenerators Würfelschwein aus dem Gesellschaftsspiel ‚Schweinerei' (engl. ‚Pass the Pigs®') vergleichen. Der Beitrag stellt einerseits die entsprechende Lernumgebung vor und zeigt andererseits, wie Lernende bei deren Bearbeitung geometrische und stochastische Eigenschaften miteinander vernetzen und so potenziellen Fehlvorstellungen begegnet wird.*

1 Einleitung

Die Bedeutung der Stochastik für den Mathematikunterricht der Grundschule ist seit langer Zeit unbestritten und weist vielfältige Facetten auf (vgl. Winter 1976). Dabei ist der Würfel ein wichtiges Zufallsgerät für elementar-stochastische Erkundungen (vgl. z. B. KMK 2005; Sill 2018) und stellt zudem im Mathematikunterricht der Grundschule das wichtigste Beispiel für einen geometrischen Körper dar. „Es gibt kaum einen geometrischen Körper, der so zahlreiche und unterschiedliche Möglichkeiten für geometrische Entdeckungen bietet" (Schipper 2009, S. 262). Allerdings werden die Zusammenhänge zwischen den geometrischen und stochastischen Eigenschaften im Grundschulunterricht selten thematisiert. Dabei kann eine Vernetzung dieser unterschiedlichen Perspektiven Fehlvorstellungen bzgl. der Wahrscheinlichkeiten beim Würfelspiel begegnen helfen.

2 Tragfähige Vorstellungen entwickeln – Fehlvorstellungen begegnen

Schülerinnen und Schüler sollen bereits in der Grundschule Kenntnisse über den Zufall erwerben (vgl. z. B. Hasemann et al. 2011) und tragfähige Vorstellungen entwickeln. Insbesondere soll im Mathematikunterricht auch den Fehlvorstellungen nicht weniger Kinder mit der Förderung stochastischen Denkens begegnet werden (vgl. Schipper 2009). Solche Fehlvorstellungen erwachsen i. d. R. aus individuellen Alltagserfahrungen, sind subjektiv viabel und daher oft sehr robust gegenüber der wissenschaftlichen Sichtweise (vgl. z. B. Posner et al. 1982). So ist es bei vielen Würfelspielen – wie z. B. ‚Mensch ärgere dich nicht' – von besonderer Bedeutung, eine 6 zu würfeln. Folglich wird von den Spielenden der Ausgang ‚6' mit dem Ausgang ‚nicht 6' verglichen. Der Wurf einer 6 wird daraufhin subjektiv als ‚schwieriger' zu erreichen wahrgenommen und verallgemeinernd vermutet, dass die 6 weniger wahrscheinlich sei als alle anderen Zahlen.

> „Weil, man sagt ja immer, bei ner Sechs ist das ein Glück und bei einer Drei nicht, und irgendwie mein ich jetzt, dass die Sechs schwieriger zu bekommen ist als die Drei" (Katja, Klasse 3; aus Knipping 2014, S. 50).

Neben dieser macht Eichler (2010) auf fünf weitere solcher typischen, mit dem Würfelspiel verbundenen Fehlvorstellungen aufmerksam: So nehmen einige Schülerinnen und Schüler bei mehrfach aufeinanderfolgendem Wurf der 6 an, dass entweder keine 6 mehr folgen dürfte, weil ‚alle Sechser raus' seien (Kompensationsargument), oder wieder eine 6 folgen müsste, weil es sich um einen ‚Sechserwürfel' handle (Beharrungsargument). Andere glauben, dass der Zufall ‚unregelmäßige' Ereignisse produziere und so Wurffolgen wie 6, 6, 6, 2, 1 unwahrscheinlicher seien als 6, 2, 6, 1, 6. Wieder andere vermuten, dass bei wiederholtem Sechserwurf geschummelt würde oder Magie im Spiel sei. Alle diese sog. „naiven Konzepte" (Renkl 1997) bzgl. des Würfelns gründen im mangelnden Wissen nicht nur um die stochastischen Eigenschaften des Würfels, sondern auch deren Zusammenhang mit der Geometrie des beim Würfelspiel verwendeten regelmäßigen Hexaeders. Die stochastische Relevanz der geometrischen Eigenschaften des Spielwürfels wird dabei nicht wahrgenommen und dieser auch nicht als Laplace'sches Zufallsgerät erkannt, bei dem alle möglichen Ausgänge die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Folglich dominieren bei vielen Lernenden die subjektiven, erfahrungsgebundenen Sichtweisen.

Die daraus möglicherweise resultierenden Fehlvorstellungen im Hinblick auf eine stochastische Reflexion von Würfelspielen erfordern von den Lernenden damit einen sog. Konzeptwechsel *(conceptual change)*. Dieser wird in einem traditionellen Verständnis in der Überwindung der gegenüber wissenschaftlichen Vorstellungen als defizitär betrachteten Sichtweise der Lernenden gesehen (vgl. Posner et al. 1982; auch Schnell 2014, S. 10 ff.). Die subjektiven Sichtweisen der Lernenden gilt es demnach, durch fachlich adäquate Vorstellungen zu ersetzen (vertikaler Konzeptwechsel). Dieses traditionelle Verständnis berücksichtigt allerdings zu wenig, dass entsprechende Sichtweisen beim Würfelspiel Unterhaltung und Spaß weder stören noch verhindern und somit dabei durchaus viabel bleiben (vgl. Rütten & Scherer 2015). Dieser bleibenden Viabilität trägt die Idee eines horizontalen Konzeptwechsels Rechnung (vgl. Prediger 2008). Situationsgebunden wird dabei zwischen nebeneinander existierenden Vorstellungen gewechselt. Fehlvorstellungen werden darin nicht vollständig ersetzt, aber wissenschaftliche Konzepte neben diesen aufgebaut (vgl. Rütten & Scherer 2015).

Um die Entwicklung einer fachlich adäquaten Vorstellung anzuregen und den oben erwähnten möglichen Fehlvorstellungen zum Würfel im Unterricht zu begegnen, scheint es sinnvoll, ein Lernarrangement zu entwickeln, in dem geometrische und stochastische Eigenschaften des Würfels vernetzt werden. Dieses Ziel verfolgt die im Rahmen des Projekts ‚Mathe-Spürnasen' entwickelte Lernumgebung ‚Schweinewürfeln', die eine entsprechende Vernetzung durch den Vergleich des Würfels mit einem asymmetrischen Zufallsgenerator motiviert.

3 Vernetzende Lernumgebung

Seit 2012 besteht an der Universität Duisburg-Essen das Lehr-Lern-Labor ‚Mathe-Spürnasen' (vgl. Baltes et al. 2014; Rütten et al. 2018). Grundschulkinder (Klasse 4) können im Labor einen Vormittag in drei Kleingruppen mathematische Inhalte aus unterschiedlichen Perspektiven erkunden. Im Rahmen des Projekts wurden dafür substanzielle Lernumgebungen entwickelt (vgl. Wittmann 1998; Krauthausen & Scherer 2014), die u. a. das Ziel verfolgen, mathematische Inhaltsbereiche miteinander zu verknüpfen (vgl. Wittmann 2001). Eine dieser Lernumgebungen thematisiert den Würfel unter unterschiedlichen Perspektiven (siehe Abb. 1). Dem generellen Design des Projekts entsprechend ist die Lernumgebung in eine Einführungs- und verschiedene Vertiefungseinheiten unterteilt, wobei diese jeweils als Lernumgebungen innerhalb der Lernumgebung betrachtet werden können (vgl. Rütten et al. 2018). Die Einführungseinheit der Lernumgebung ‚Würfel' beschäftigt sich mit dem Würfel als geometrischem Körper und dessen Eigenschaften (u. a. sechs kongruente Quadrate als Seitenflächen, gleichlange Kanten). Im Anschluss daran erfolgen in den Kleingruppen unterschiedliche Vertiefungen. Neben der Auseinandersetzung mit einem Würfeltrick (vgl. Scherer & Wellensiek 2011) bzw. dem Finden von Würfelmehrlingen und der Erkundung von deren Augensummen (vgl. Winter 2010) hat eine Vertiefung einen expliziten stochastischen Schwerpunkt: Eine der Kleingruppen setzt sich in der Vertiefung ‚Schweinewürfeln' mit dem Würfel sowie einem asymmetrischen Zufallsgenerator und deren stochastischen Eigenschaften auseinander. Diese Vertiefung wird in den folgenden Abschnitten näher beleuchtet. Dabei beziehen sich die empirischen Daten auf die regulären Erprobungen im Rahmen des Lehr-Lern-Labors sowie auf eine im Projekt entstandene Bachelorarbeit (vgl. Knipping 2014). Berücksichtigt werden die Daten von 33 Lernenden (Klasse 4) aus vier Erprobungen und von sieben Grundschulkindern (Klasse 3) aus Einzelinterviews.

3.1 Historische Einbettung

Die Vertiefungseinheit ‚Schweinewürfeln' beginnt mit einem historischen Exkurs zur Entwicklung des Spielwürfels. Den Lernenden werden dazu zunächst Nachbildungen von Astragali, Sprunggelenksknochen von Schaf, Ziege oder Rind, als historische Spielgeräte vorgestellt. Bei Ineichen (1996, S. 26; vgl. auch Schädler 1997) finden sich u. a. folgende Erläuterungen zum Spiel mit Astragali: Werden

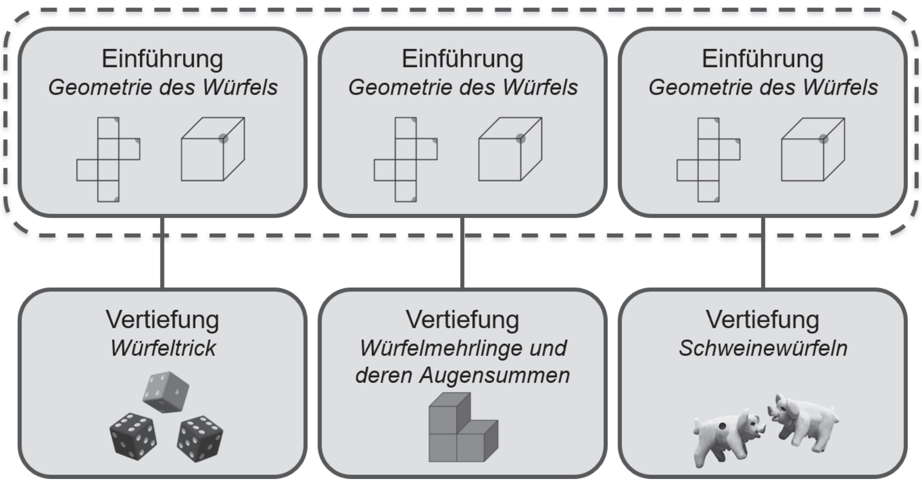
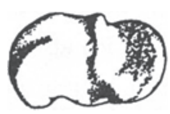


Abb. 1: Aufbau der Lernumgebung ‚Würfel'

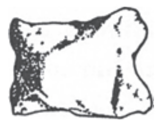
die Astragali wie Spielwürfel geworfen, können die Knochen als längliches, vierseitiges Prisma mit gerundeten Grund- und Deckflächen sowie nichtebenen Seitenflächen auf vier unterschiedliche Seiten fallen. Diese werden als ‚Chios' (vermutlich nach der gleichnamigen, ähnlich geformten Insel), ‚Rücken' *(Hyption)*, ‚Bauch' *(Pranes)* und ‚Hund' *(Kyon)* bezeichnet (vgl. Ineichen 1996). In einigen Spielen wurden diesen Elementarereignissen Punktwerte zugemessen, wobei es dabei anscheinend regionale Unterschiede gab. Einige Quellen bezeugen, dass der Wurf ‚Hund' mit 6 Punkten den höchsten Wert hatte und ‚Chios' mit einem Punkt den niedrigsten. In anderen Quellen erscheint es genau umgekehrt (siehe Abb. 2). Ineichen (1996) macht jedoch darauf aufmerksam, dass die Summe der gegenüberliegenden Seiten ähnlich wie beim gegenwärtigen Spielwürfel immer 7 betrug. Wird die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Ausgänge betrachtet (siehe Abb. 2), fällt auf, dass den Ereignissen mit den geringsten Wahrscheinlichkeiten die Wertungen 1 und 6 zugeordnet wurden.

Bezeichnung: Chios
Wert: 1 oder 6
P(Chios): ca. 10 %



Bezeichnung: Hund
Wert: 1 oder 6
P(Hund): ca. 10 %

Bezeichnung: Rücken
Wert: 3 oder 4
P(Rücken): ca. 40 %



Bezeichnung: Bauch
Wert: 3 oder 4
P(Bauch): ca. 40 %

Abb. 2: Astragali – Name, Wert, Wahrscheinlichkeit (Darstellungen entnommen aus Ineichen 1996, S. 27)

Spätestens in der Spätantike wurden zum Würfeln neben den unbearbeiteten Knochen mehr und mehr Knochen genutzt, die zu regelmäßigen Hexaedern geschliffen waren. Den Lernenden werden in der Lernumgebung daher auch aus Knochen geschliffene Spielwürfel gezeigt.

Auch wenn sich die Frage nach den Gründen für den historischen Wechsel der Zufallsgeräte im Spiel kaum beantworten lässt, so wirft der Wechsel zumindest die Frage nach den Unterschieden zwischen Hexaeder und Astragal auf. Die Lernenden werden daher aufgefordert, die Unterschiede zwischen Spielwürfel und Astragal zu beschreiben. Dabei nehmen sie auf unterschiedliche Eigenschaften der beiden Zufallsgeneratoren Bezug (Schüleräußerungen, Klasse 4, aus dem Projekt ‚Mathe-Spürnasen'):

> „Bei den Würfeln stehen die Zahlen auf den Seiten, bei den Astragali muss man sich die Punktwerte der einzelnen Seiten merken."

> „Mit den Astragali kann man nur 1, 3, 4 und 6 werfen, mit dem Würfel auch 2 und 5."

> „Der Würfel ist viel regelmäßiger als die Astragali."

Wie die letzte Schüleräußerung zeigt, werden dabei im weitesten Sinn auch geometrische Eigenschaften der beiden Objekte angesprochen.

Im weiteren Verlauf sollen die Lernenden ein ‚unregelmäßiges' Zufallsgerät mit einem ‚regelmäßigen' Zufallsgerät auch im Rahmen eines stochastischen Experiments vergleichen. Dabei soll dieser Vergleich die unterschiedlichen stochastischen Eigenschaften der beiden Geräte besonders hervorheben.

3.2 Stochastisches Experiment

Anstelle der Astragali werden Würfelschweine aus dem von Winning Moves© Games vertriebenen Spiel ‚Pass the Pigs®' bzw. ‚Schweinerei' von David Moffat verwendet und mit dem sechsseitigen Spielwürfel verglichen. Auch wenn anhand von Experimenten mit teilsymmetrischen Objekten (z. B. Quader, Riemer-Würfel) der Zusammenhang von Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit besonders gut verdeutlicht werden kann (vgl. z. B. Krüger et al. 2015), werden in der Lernumgebung die asymmetrischen Würfelschweine eingesetzt, da deren Verwendung als Zufallsgenerator im entsprechenden Gesellschaftsspiel eine nähere stochastische Erkundung besonders motiviert. Der Vorteil der Würfelschweine von ‚Schweinerei' gegenüber den Astragali sowie von den bei Brauner (2014) oder Hammad (2018) genutzten Würfelschweinen für das folgende Experiment besteht darin, dass es bei diesem Schwein ebenso wie beim Spielwürfel sechs Ausgänge gibt (siehe Tab. 1).

Damit unterscheiden sich die Würfelschweine von den Spielwürfeln nur hinsichtlich der geometrischen Form. Diese bestimmt nämlich bei beiden als homogenen Körpern die für das Würfelverhalten relevante physikalische Eigenschaft des Schwerpunkts. Dadurch sind die Ausgänge bei den asymmetrischen Würfelschweinen anders als beim Spielwürfel, aber ähnlich wie bei den ebenfalls asymmetrischen (allerdings auch nicht homogenen) Astragali nicht gleichwahrscheinlich (vgl. Gorman 2012; auch Kern 2006; siehe Tab. 1). Die deutlich verschiedenen Wahrscheinlichkeiten für die Ausgänge beim Würfeln mit dem Würfelschwein lassen dieses Nicht-Lapla-

Ausgang		Wahrscheinlichkeit
‚Faule Sau 1'		34,9 % (31,05 %)
‚Faule Sau 2'		30,2 % (24,95 %)
‚Suhle'		22,4 % (32,65 %)
‚Haxe'		8,8 % (9,05 %)
‚Schnauze'		3,0 % (2,1 %)
‚Backe'		0,6 % (0,2 %)

Tab. 1: Wahrscheinlichkeiten der Würfelschweine (vgl. Gorman 2012; in Klammern Daten aus Schnabel & Neubert 2017 basierend auf 2 000 Würfen; Grafiken entnommen aus Winning Moves© Games ‚Schweinerei')

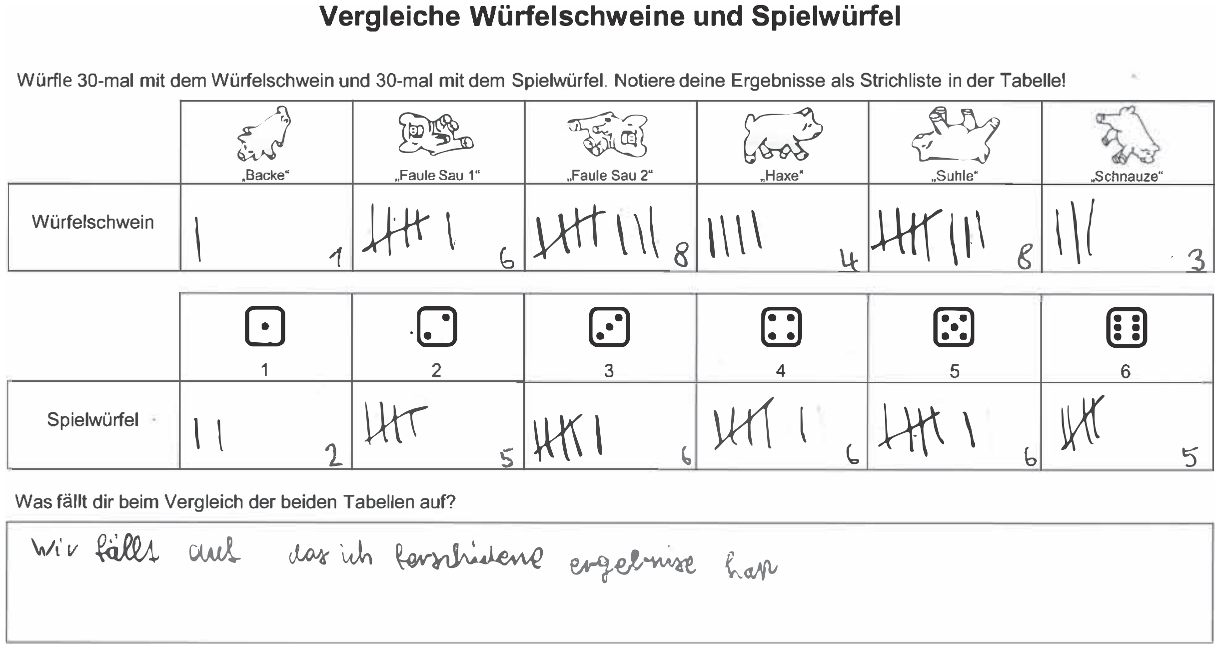
ce-Gerät zusätzlich als besonders geeignet für einen kontrastierenden Vergleich mit dem Laplace-Würfel erscheinen.

Anders als bei Schnabel und Neubert (2017) oder Hammad (2018), die lediglich die Erkundungen der Würfelschweine unter der Perspektive eines frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs vorschlagen, erfolgt in der hier vorgestellten Lernumgebung ‚Schweinewürfeln' der unmittelbare kontrastierende Vergleich zwischen den beiden Zufallsgeräten. Bevor die Lernenden nach der historischen Einbettung jedoch mit Würfelschweinen und regelmäßigem Spielwürfel experimentieren, werden die unterschiedlichen Elementarereignisse bei den beiden Zufallsgeräten besprochen und das Erstellen einer Strichliste thematisiert. Die Lernenden würfeln anschließend je 30 Mal mit Würfelschwein und Spielwürfel und notieren die jeweiligen Ergebnisse in entsprechenden Tabellen (siehe Abb. 3).

3.3 Auswertung des Experiments

Nach dieser Experimentierphase erfolgt eine im Hinblick auf die Vernetzung von Geometrie und Stochastik wichtige Phase der Reflexion der Ergebnisse. Dabei präsentieren die Lernenden ihre Daten den Mitschülerinnen und Mitschülern, benennen Auffälligkeiten und erklären diese mit ihren eigenen Worten. Da 30 Würfe nicht ausreichen, um auf die Wahrscheinlichkeit von Einzelereignissen schließen zu können, werden in diesem Zuge die Datensätze der einzelnen Lernenden in einer gemeinsamen Tabelle zusammengefügt, um aussagekräftigere Zahlen zu erhalten (siehe Abb. 4; Datensätze von sieben Lernenden, wobei z. T. mehr als 30 Würfe durchgeführt wurden). Bei der Datenauswertung lassen sich bei den Lernenden im Wesentlichen drei Vorgehensweisen beobachten:

(1) Wenig ergiebig erscheint der *spaltenweise Vergleich* zwischen Häufigkeiten bestimmter Ausgänge bei Schwein und Würfel (z. B. Vergleich von ‚Schnauze' mit ‚6' oder ‚Faule Sau 1' mit ‚2'). Hierbei lassen sich eher undifferenziert Unregelmäßig-



Vergleiche Würfelschweine und Spielwürfel

Würfle 30-mal mit dem Würfelschwein und 30-mal mit dem Spielwürfel. Notiere deine Ergebnisse als Strichliste in der Tabelle!

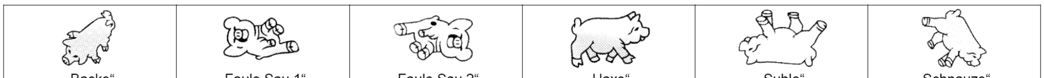
	„Backe"	„Faule Sau 1"	„Faule Sau 2"	„Haxe"	„Suhle"	„Schnauze"
Würfelschwein	| 1	|||| | 6	|||| ||| 8	|||| 4	|||| ||| 8	||| 3

	1	2	3	4	5	6
Spielwürfel	|| 2	|||| 5	|||| | 6	|||| | 6	|||| | 6	|||| 5

Was fällt dir beim Vergleich der beiden Tabellen auf?

Wir fällt auf das ich forschidene ergebnise hap

Abb. 3: Annikas Arbeitsblatt



	„Backe“	„Faule Sau 1“	„Faule Sau 2“	„Haxe“	„Suhle“	„Schnauze“
Würfelschwein	0	89	74	16	52	6

	1	2	3	4	5	6
Spielwürfel	40	44	42	39	36	36

Abb. 4: Zusammengefügte Datensätze einer Erprobung (insgesamt 237 Würfe)

keiten zwischen den Ausgängen der beiden Zufallsgeräte feststellen oder sogar eher Gemeinsamkeiten zwischen beiden (z. B. bzgl. der Extrema, vgl. Lara und Lasse) vermuten.

> „Faule Sau 1 ist 11-mal gewürfelt worden. 2 wurde sieben gewürfelt“ (Lisa, Klasse 4)

> „Die 6 habe ich nicht so oft und das beim Würfel und beim Schwein.“ (Lara, Klasse 4)

> „Faule Sau würfelt man am meisten. 5 würfelt man am meisten.“ (Lasse, Klasse 4)

> „Also bei mir sind die Ergebnisse gar nicht so anders. Außer bei Backe, nämlich beim Spielwürfel bei der 1, da hab ich fünfmal und bei der Backe null. Bei der Schnauze einmal und bei der 6 viermal.“ (Jan-Luca, Klasse 4)

(2) Werden von den Lernenden die *Extremwerte des gesamten Datensatzes* (z. B. Minimum, vgl. Anna) betrachtet, liegen selbst bei 30 Würfen sowohl Maximum als auch Minimum meist bei den Würfelschweinen.

> „Also dass ich beim Würfel alles hatte und bei den Schweinen war es etwas schwieriger. Deswegen hatte ich keine Backe und keine Schnauze.“ (Anna, Klasse 4)

(3) Beim *zeilenweisen Vergleich* nehmen die Lernenden die Verteilung aller Häufigkeiten sowohl beim Schwein als auch beim Würfel in den Blick und stellen deren Unterschiede heraus. Dabei vermischen sich die Beschreibungen z. T. mit ersten, oft eher impliziten Wahrscheinlichkeitsaussagen (vgl. Merle).

> „Dass die Würfel mehr verteilt sind und sich die Schweine mehr auf Faule Sau 1 und 2 verzogen haben.“ (Julia, Klasse 4)

> „Dass das bei den Schweinchen unregelmäßig ist. Und bei den Würfeln, dass man jede Zahl so eben gleich erwürfeln kann.“ (Merle, Klasse 4)

Durch die Lehrperson wird im gemeinsamen Austausch über die Beobachtungen außerdem eine Betrachtung der Spannweite angeregt. Diese ist auch bei der geringen Anzahl an Würfen i. d. R. bei den Spielwürfeln kleiner als bei den Würfelschweinen. Auch wenn der Spannweite in statistischen Analysen gemeinhin wenig Aussagekraft beigemessen wird, da sie nur die Extrema berücksichtigt (vgl. Kütting & Sauer 2011), erscheint der Vergleich der Spannweiten der absoluten Häufigkeiten der einzelnen Zufallsgeräte für die Viertklässler durchaus sinnvoll, fehlen ihnen doch aufgrund einer erst rudimentären Kenntnis der rationalen Zahlen hilfreichere Kennwerte, wie z. B. die relative Häufigkeit, zum Vergleich der experimentell erhobenen Daten. Die Spannweiten zeigen bei den beiden Experimenten schon bei einer relativ kleinen Anzahl von Versuchen i. d. R. deutliche Unterschiede.

Die gemachten Entdeckungen motivieren die Lernenden zur Erklärung der entsprechenden Phänomene. Schnabel und Neubert (2017) zeigen, dass Lernende zur Begründung des unterschiedlichen Auftretens der einzelnen Ereignisse beim Würfelschwein auch geometrische Argumente (Oberflächenvergleiche oder die Betrachtung prägnanter Formen) anführen. Daneben stützen einige Lernende ihre Argumentationen auf Alltagserfahrungen:

> „So vermutete ein Schüler, dass das Schwein am häufigsten auf dem Rücken landet, da er selbst auch oft auf dem Rücken lande, wenn er im Sport eine falsche Bewegung mache oder etwas noch nicht gut könne“ (Schnabel & Neubert 2017, S. 28).

Allerdings wurde in den Erprobungen von Schnabel und Neubert die Einführung des Würfelschweins auch in eine Geschichte eingekleidet, die möglicherweise derartige alltagsbezogene bzw. kontextbezogene Begründungen herausfordert.

Im hier präsentierten Projekt der ‚Mathe-Spürnasen’ ließen sich derartige Begründungen nicht finden. Vielmehr haben die Schülerinnen und Schüler beim Vergleich von Spielwürfel und Würfelschwein nahezu ausschließlich geometrische Eigenschaften zur Begründung stochastischer Phänomene herangezogen und damit die unterschiedlichen mathematischen Perspektiven bzgl. des Würfels vernetzt (vgl. Baltes et al. 2014; Rütten & Scherer 2015):

Annika (Klasse 4; siehe Abb. 3) vergleicht die Ausgänge ‚Faule Sau 1‘ und ‚Haxe‘ und vermutet, dass ‚Haxe‘ unwahrscheinlicher ist:

> „Haxe ist schwieriger zu würfeln, denn das Schwein kann da leicht umkippen.“

Annika zieht die Stabilität des Schweins, die in seinen geometrischen Eigenschaften gründet, zur Begründung der geringeren Häufigkeit des Ausgangs ‚Haxe‘ heran.

Auf die Frage, ob es auch beim Spielwürfel wie beim Schwein Ausgänge gäbe, die schwieriger zu erhalten seien, antwortet Lisa (Kasse 4):

> „Nein, die sind alle gleichwahrscheinlich.“

Auch hier zieht sie die geometrischen Eigenschaften als Begründung ihrer Vermutung heran:

> „Der Würfel ist gleichmäßig.“

Um die Vermutung der Gleichwahrscheinlichkeit der Ausgänge beim Spielwürfel zu begründen, bezieht sich auch Katja (Klasse 3) auf dessen Geometrie (aus Knipping 2014, S. 48):

> „Weil ich glaube der Würfel *[nimmt den Spielwürfel]* hat hier auch wieder größere Fläche *[zeigt auf alle sechs Seiten des Würfels]* und der kann dann besser so auf allen Seiten stehen, weil alle gleich groß sind. Bei dem Schwein sind ja nicht alle gleich groß, denk ich mal.“

Bezogen auf das konkrete Objekt nutzt Katja geometrische Sprache (größere Fläche, gleich groß, Seiten) zur Begründung. In ähnlicher Weise argumentiert Lorenz (Klasse 4):

> „Hier *[zeigt auf den Würfel]* sind alle Seiten gleich. Beim Schwein ist das nicht so.“

Ebenso nutzt Sarah (Klasse 4) geometrische Sprache (Viereck, Quadrat), um zu begründen, warum alle Ausgänge beim Spielwürfel gleichwahrscheinlich sind:

> „Der Würfel besteht nur aus Vierecken, daher kommen alle gleich vor. Das Schwein hat nichts mit nem Viereck oder Quadrat zu tun.“

Die Entdeckungen, die beim Betrachten der Ergebnisse aus dem Experiment gemacht werden, lassen Lernende somit zur Begründung der entdeckten Phänomene einen Zusammenhang zwischen geometrischen Eigenschaften und stochastischem Verhalten der Zufallsgeräte herstellen. Dies deutet darauf hin, dass diese Lernenden geometrische und stochastische Eigenschaften vernetzen und neben den auf alltagsweltlichen Erfahrungen beruhenden (Fehl-) Vorstellungen auch fachlich adäquate Sichtweisen einnehmen.

3.4 Laplace- oder Nicht-Laplace-Gerät

Abschließend wird in der Lernumgebung ein Rückgriff auf diese (neue) Vernetzung der geometrischen und stochastischen Perspektive auf den Würfel herausgefordert. Den Lernenden werden Oktaeder und Kuboktaeder als Plexiglas-Modelle präsentiert. Die Lernenden sollen aufgrund der geometrischen Beschaffenheiten eine Vermutung über deren stochastische Eigenschaften aufstellen und entscheiden, ob es sich bei diesen Objekten um Laplace’sche oder Nicht-Laplace’sche Zufallsgeräte handelt. Da das Oktaeder aus lauter regelmäßigen Dreiecken besteht, lassen sich wie beim Würfel die Ausgänge der einzelnen Seiten als gleichwahrscheinlich annehmen. Dagegen erscheint das aus Quadraten und regulären Dreiecken bestehende Kuboktaeder als nicht-Laplace’sches Zufallsgerät. So lag auch nach Höfer und Hesse (2008) im Experiment mit 15 000 Würfen in 23,2 % der Fälle eine Dreiecksseite oben. Allerdings ist die Erkundung der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Elementarereignisse beim Kuboktaeder experimentell kaum noch zu realisieren und daher seine stochastischen Eigenschaften eher theoretisch zu begründen.

4 Fazit und Perspektiven

Die Lernumgebung ‚Schweinewürfeln‘ fördert den Auf- bzw. Ausbau einer Vernetzung geometrischer und stochastischer Eigenschaften und kann so für vielfaltige stochastische Phänomene sensibilisieren und möglichen Fehlvorstellungen bzgl. der Wahrscheinlichkeiten beim Würfelspiel begegnen. Dabei dient das Wissen um geometrische Eigenschaften zunächst dem Erklären und Begründen stochastischer Phänomene. Die entsprechende Vernetzung ermöglicht aber auch, auf der Grundlage des geometrischen Wissens um bestimmte Körper (z. B. Oktaeder und Kuboktaeder) Vermutungen über deren Verhalten als Zufallsgerät aufzustellen.

Neben der oben beschriebenen Lernumgebung zum Vergleich Würfelschwein und Spielwürfel werden im Projekt ‚Mathe-Spürnasen‘ in der Vertiefung ‚Verflixte Eins‘ der Lernumgebung ‚Platonische Körper‘ im Sinne von Neubert (2011) jeweils zwei der fünf platonischen Körper bzgl. ihrer stochastischen Eigenschaften verglichen (vgl. auch Pfeil 2010). Nachdem zuvor in der Einführung die geometrischen Eigenschaften dieser Köper erarbeitet wurden, werden auch hier auf diese Weise stochastische und geometrische Eigenschaften vernetzt.

Auch wenn im vorgestellten Setting keine Erhebung der Eingangsvoraussetzungen der Lernenden zu Zufall und Wahrscheinlichkeit stattgefunden hat, lassen die Argumentationen der Schülerinnen und Schüler den Schluss zu, dass die gewählten Lernumgebungen einen geeigneten Kontext für Grundschulkinder bieten: ‚Schweinewürfeln‘ und auch ‚Verflixte Eins’ zeigen, dass sich eine vernetzende Thematisierung geometrischer und stochastischer Eigenschaften lohnt, um einerseits einen differenzierteren Wahrscheinlichkeitsbegriff aufzubauen und andererseits potenziellen Fehlvorstellungen zu begegnen. Zudem kann so die Erkundung des vernetzten Charakters von Mathematik realisiert werden (vgl. Walther et al. 2011, S. 19 f.).

Literatur

Baltes, U.; Rütten, C.; Scherer, P.; Weskamp, S. (2014): Mathe-Spürnasen – Grundschulklassen experimentieren an der Universität. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (Bd. 1, S. 121–124). Münster: WTM.

Brauner, U. (2014): Eine Wahlumfrage langfristig vorbereiten. Ein Beispiel für ein Spiralcurriculum Stochastik. In: *mathematik lehren* (182), S. 16–20.

Eichler, K.-P. (2010): Wahrscheinlich kein Zufall. Betrachtungen rund um Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit. In: *Praxis Grundschule* (3), S. 7–13.

Gorman, M. F. (2012): Analytics, Pedagogy and the Pass the Pigs Game. In: *INFORMS Transactions on Education 13* (1), S. 57–64.

Hammad, C. (2018): Schweinopel. In R. Benölken, N. Berlinger & M. Veber (Hrsg.), *Alle zusammen! Offene, substanzielle Problemfelder als Gestaltungsbaustein für inklusiven Mathematikunterricht* (S. 152–160). Münster: WTM.

Hasemann, K.; Mirwald, E.; Hoffmann, A. (2011): Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (5. Aufl., S. 141–161). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Höfer, K.; Hesse, P. (2008): *Das große Tipp-Kipp-Buch. Geschichte & Regeln, Technik & Zubehör, Prominente & Anekdoten.* Hannover: Schlütersche Verlagsgesellschaft.

Ineichen, R. (1996): *Würfel und Wahrscheinlichkeit. Stochastisches Denken in der Antike.* Heidelberg: Spektrum.

Kern, J. C. (2006): Pig Data and Bayesian Inference on Multinomial Probabilities. In: *Journal of Statistics Education 14* (3), www.amstat.org/publications/jse/v14n4.

KMK (Hrsg., 2005): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15.10.2004.* München: Wolters Kluwer.

Knipping, J. (2014): *Vergleich der Argumentationsstrukturen von Drittklässlern bei Würfelexperimenten – Einzelinterviews.* Bachelor-Arbeit. Essen: Universität Duisburg-Essen.

Krauthausen, G.; Scherer, P. (2014): *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht – Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule.* Seelze: Kallmeyer.

Krüger, K.; Sikora, C.; Sill, H.-D. (2015): *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I* (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II). Berlin [u. a.]: Springer Spektrum.

Kütting, H.; Sauer, M. J. (2011): *Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte* (3. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Neubert, B. (2011): Welcher Zufallsgenerator ist der Beste? Überlegungen zu „Zufall und Wahrscheinlichkeit“ in der Grundschule. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011* (S. 55–70). Bamberg: University of Bamberg Press.

Pfeil, C. (2010): „Mit welchem Würfel ist deine Gewinnchance größer?“ Argumentieren und Verbalisieren zur Wahrscheinlichkeit. In: *Grundschulunterricht Mathematik 57* (2), S. 22–25.

Prediger, S. (2008): Do You Want Me to Do It with Probability or with My Normal Thinking? Horizontal and vertical views on the formation of stochastic conceptions. In: *International Electronic Journal of Mathematics Education 3* (3), S. 126–154.

Posner, G. J.; Strike, K. A.; Hewson, P. W.; Gertzog, W. A. (1982): Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. In: *Science Education 66* (2), S. 211–227.

Renkl, A. (1997): Vorwissen und Schulleistung. In J. Möller & O. Köller (Hrsg.), *Emotionen, Kognitionen und Schulleistung* (S. 173–190). Weinheim: Beltz.

Rütten, C.; Scherer, P. (2015): ‚Throwing Dice‘ versus ‚Passing the Pigs‘. Fourth-Graders‘ Reasoning about Probability. In J. Novotná & H. Moraová (Hrsg.), *Proceedings SEMT '15. Developing mathematical language und reasoning* (S. 284–292). Prag: Charles University.

Rütten, C.; Scherer, P.; Weskamp, S. (2018): Entwicklungsforschung im Lehr-Lern-Labor – Lernangebote für heterogene Lerngruppen am Beispiel der Fibonacci-Folge. In: *mathematica didactica 41* (2), S. 127–145.

Schädler, U. (1997): Astragalspiele gestern und heute. Teil 2: Würfelspiele. In: *fachdienst spiel* (3), S. 36–43.

Scherer, P.; Wellensiek, N. (2011): Verborgene Mathematik: Rechentricks verstehen und begründen. In: *MNU Primar. Das Journal für den frühen mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 3* (3), S. 88–95.

Schipper, W. (2009): *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Braunschweig: Schroedel.

Schnabel, S.; Neubert, B. (2017): „Schweinereien" – Grundschüler untersuchen einen asymmetrischen Zufallsgenerator. In: *Stochastik in der Schule 37* (3), S. 25–29.

Schnell, S. (2014): *Muster und Variabilität erkunden. Konstruktionsprozesse kontextspezifischer Vorstellungen zum Phänomen Zufall.* Wiesbaden: Springer.

Sill, H.-D. (2018): Zur Stochastikausbildung im Primarstufenlehramt. In R. Möller & R. Vogel (Hrsg.), *Innovative Konzepte für die Grundschullehrerausbildung im Fach Mathematik* (S. 71–93). Wiesbaden: Springer.

Walther, G.; Selter, C.; Neubrand, J. (2011): Die Bildungsstandards Mathematik. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (5. Aufl., S. 16–41). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Winter, H. (1976): Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule. In: *Didaktik der Mathematik* (1), S. 22–37.

Winter, H. (2010): Würfel & Co – Kunst und Natur in den Symmetrien von Körpern. In M. Ludwig & R. Oldenburg (Hrsg.), *Basiskompetenzen in der Geometrie. Tagungsband der Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 35–76). Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. C. (1998): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. In: *Beiträge zur Lehrerbildung 16* (3), S. 329–342.

Wittmann, E. C. (2001): Developing mathematics education in a systemic process. In: *Educational Studies in Mathematics 48* (1), S. 1–20.

Anschrift der Verfasser

Dr. Christian Rütten
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Straße 9
45127 Essen
christian.ruetten@uni-due.de

Prof. Dr. Petra Scherer
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Straße 9
45127 Essen
petra.scherer@uni-due.de